

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

TƯ DUY THUẬT TOÁN TRONG LỚP BÀI TOÁN TÍNH XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

Ths. Phạm Ngọc Anh

Hà Nội, 5/2017

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

TƯ DUY THUẬT TOÁN TRONG LỚP BÀI TOÁN TÍNH XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

Xác nhận của Bộ môn Toán

Hà Nội, 5/2017

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	4
Chương 1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT	5
1.1. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN	5
1.2. QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ	5
1.3. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN.....	6
1.4. CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT	6
1.4.1. Định lý cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.	6
1.4.2. Định lý nhân cho hai biến cố độc lập.....	6
1.4.3. Định lý nhân cho hai biến cố phụ thuộc.....	6
1.4.3.1. Xác suất có điều kiện.....	7
1.4.3.2. Định lý nhân cho hai biến cố phụ thuộc.....	7
1.4.4. Định lý công xác suất cho hai biến cố không xung khắc.....	7
1.5. CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ , CÔNG THỨC BAYES	7
1.5.1. Hệ đầy đủ các biến cố.....	7
1.5.2. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes.....	7
Chương 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN.....	8
Dạng 1. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ CỘNG, NHÂN XÁC SUẤT.....	8
Dạng 2. SỬ DỤNG CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ CÔNG THỨC BAYES	12
KẾT LUẬN.....	16
TÀI LIỆU THAM KHẢO	17

MỞ ĐẦU

Trong phần lớn các trường hợp, kết quả hoạt động của con người phụ thuộc vào mức độ chuẩn xác do nhận thức được bản chất thuật toán của các hoạt động của mình. Nhờ kinh nghiệm có được, khi giải quyết một loạt công việc người ta biết cần phải có những hoạt động gì ? Mỗi hoạt động có những thao tác gì ? Thứ tự các thao tác đó như thế nào ? Việc tìm ra một dãy các hoạt động, các thao tác, theo đó giải quyết được vấn đề, có thể xem như đã xây dựng được một quy trình có tính thuật toán, mà việc tuân theo quy trình đó sẽ dẫn đến kết quả. [4, tr 160]

Tư duy thuật toán (tư duy thuật giải) liên hệ chặt chẽ với khái niệm thuật giải. Phương thức tư duy này thể hiện ở những hoạt động sau đây: (i) Thực hiện những hoạt động theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải cho trước; (ii) Phân tích một hoạt động thành những hoạt động thành phần được thực hiện theo một trình tự xác định; (iii) Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động; (iv) Khái quát hoá một hoạt động trên những đối tượng riêng lẻ thành một hoạt động trên một lớp đối tượng; (v) So sánh những con đường khác nhau cùng thực hiện một công việc và phát hiện con đường tối ưu.

Tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng chỉ có thể hình thành và phát triển trong hoạt động. [3, tr 383]

Dạy học tính xác suất trong lớp bài toán xác suất cổ điển là một trong những dạng toán cơ bản, phổ biến trong lớp các bài toán về lượng trong Xác suất thống kê. Nắm vững các khái niệm phép thử, biến cố, quan hệ giữa các biến cố, khái niệm xác suất theo nghĩa cổ điển, các định lý cộng, nhân xác suất và quy trình xác định cơ bản để mô tả lại giả thiết, kết luận và tính xác suất trong Xác suất thống kê sẽ giúp người học dễ dàng tiếp cận và giải quyết các bài toán liên quan về sau

Bài báo cáo học thuật này trình bày một số thuật giải xác định cơ bản để mô tả lại giả thiết, kết luận và tính xác suất trong bài toán xác suất cổ điển, qua đó giúp người học hình thành tư duy thuật giải trong giải toán Xác suất thống kê.

Chương 1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

1.1. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

Phép thử (thí nghiệm) là một hoạt động cụ thể (của các nhà khoa học, kỹ sư) mà kết quả thu được có tính ngẫu nhiên. Theo nghĩa tổng quát, “phép thử” hoặc “thí nghiệm” là một quá trình được xác định rõ nhằm đo lường một (nhiều) đặc trưng hoặc một (nhiều) yếu tố nhất định nào đó.

Biến cố ngẫu nhiên là một kết quả của phép thử ngẫu nhiên (thực nghiệm ngẫu nhiên) Biến cố ngẫu nhiên được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa: $A, B, C, A_1, A_2, \dots$

Biến cố sơ cấp: mỗi kết quả tối giản, nghĩa là không phân chia được thành các kết quả đơn giản hơn, được gọi là biến cố sơ cấp.

Biến cố thuận lợi cho A: mọi biến cố ngẫu nhiên A bất kì đều biểu diễn được thành tổng của các biến cố sơ cấp nào đó, các biến cố sơ cấp này là biến cố thuận lợi cho A .

Biến cố không thể: là biến cố chắc chắn không xảy ra khi thực hiện phép thử. Kí hiệu: V

Biến cố chắc chắn: là biến cố chắc chắn xảy ra khi thực hiện phép thử. Kí hiệu: U

Không gian mẫu: là tập các biến cố sơ cấp có thể có của một phép thử. Kí hiệu: Ω

Biến cố đồng khả năng: là biến cố có cùng khả năng xuất hiện như nhau trong một phép thử.

1.2. QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

Quan hệ kéo theo: biến cố A kéo theo biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra.

Kí hiệu $A \subset B$

Quan hệ tương đương: biến cố A tương đương với biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại. Kí hiệu: $A = B$

Quan hệ tổng: tổng của hai biến cố A và B là một biến cố xảy ra nếu có ít nhất một trong hai biến cố A, B xảy ra (A hoặc B xảy ra). Kí hiệu: $A + B$

Quan hệ tích: tích của hai biến cố A và B là một biến cố xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra. Kí hiệu: $A.B$

Quan hệ xung khắc: biến cố A gọi là xung khắc với biến cố B nếu A và B không đồng thời xảy ra, nghĩa là $A.B = \emptyset$

Quan hệ đối lập: hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố đối lập nhau nếu có một và chỉ một biến cố chắc chắn xảy ra khi thực hiện phép thử. Khi đó biến cố B gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu $\bar{A}$

Quan hệ độc lập: hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố độc lập với nhau nếu sự xảy ra hay không xảy của biến cố A không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố B và ngược lại.

1.3. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

Xác suất của biến cố A: để biểu thị sự xuất hiện ít hay nhiều của biến cố, người ta gán cho biến A một số thực $P(A)$ thuộc đoạn $[0;1]$ và gọi $P(A)$ là xác suất của biến cố A. Phép tương ứng đó chính là một ánh xạ từ tập hợp các biến cố của phép thử đang xét vào đoạn $[0;1]$. Điều quan trọng là ánh xạ P (xem như thước đo khả năng xuất hiện của các biến cố khi thực hiện phép thử) phải là thước đo mang tính khách quan, phù hợp với thực tế.

Định nghĩa cổ điển về xác suất: nếu trong một phép thử có n biến cố sơ cấp đồng khả năng, trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của biến cố A, kí hiệu $P(A)$ là tỉ số $\frac{m}{n}$

1.4. CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

1.4.1. Định lý cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Hệ quả: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1.4.2. Định lý nhân cho hai biến cố độc lập

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì $P(A.B) = P(A).P(B)$

1.4.3. Định lý nhân cho hai biến cố phụ thuộc.

1.4.3.1. Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A|B)$ là xác suất của A tính được sau khi B đã xảy ra, và được tính bởi

công thức:
$$P(A|B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}$$

1.4.3.2. Định lí nhân cho hai biến cố phụ thuộc

Nếu A và B là hai biến cố phụ thuộc thì:

$$P(A.B) = P(B).P(A|B) \text{ nếu biến cố B xảy ra trước}$$

$$P(A.B) = P(A).P(B|A) \text{ nếu biến cố A xảy ra trước}$$

1.4.4. Định lí công xác suất cho hai biến cố không xung khắc

Nếu A và B là hai biến cố không xung khắc thì $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

1.5. CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ , CÔNG THỨC BAYES

1.5.1. Hệ đầy đủ các biến cố

Hệ các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) của một phép thử được gọi là hệ đầy đủ các biến cố nếu thoả mãn hai tính chất sau:

$$i) \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$$

$$ii) \quad A_i.A_j = V \quad (i \neq j)$$

1.5.2. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Định lí: Nếu trong một phép thử có biến cố B và một hệ đầy đủ các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) xảy ra thì:

Công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \dots + P(A_n).P(B|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i).P(B|A_i)$$

Công thức bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i).P(B|A_i)} \quad (\forall i = \overline{1, n})$$

Chương 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN

Để giải bài toán xác suất ta tuân thủ theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm và gạch chân từ khoá trong đề bài toán.
- Bước 2: Mô tả giả thiết và kết luận bằng ngôn ngữ xác suất.
- Bước 3: Vận dụng các kiến thức như định nghĩa, định lý cộng, nhân, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes ... để tính toán.

Dạng 1. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ CỘNG, NHÂN XÁC SUẤT

Trong bước 3 ta luôn tìm cách trả lời các câu hỏi sau:

- Trong bài có biến cố độc lập không?
- Trong bài có biến cố phụ thuộc không?
- Trong bài có biến cố xung khắc không?
- Trong bài có biến cố không xung khắc không?
- Trong bài có biến cố nào đã xảy ra không?

Bài toán 1: Xác suất của một thiết bị an toàn báo động khi có sự cố là 0,9. Tính xác suất báo động khi có sự cố nếu lắp đồng thời 3 thiết bị (các thiết bị hoạt động độc lập với nhau)

Giải:

Bước 1: Gạch chân từ khoá

Xác suất của một thiết bị an toàn báo động khi có sự cố là 0,9. Tính xác suất báo động khi có sự cố nếu lắp đồng thời 3 thiết bị (các thiết bị hoạt động độc lập với nhau)

Bước 2: Mô tả giả thiết và kết luận bằng ngôn ngữ xác suất

- Mô tả giả thiết: Xác suất của một thiết bị an toàn báo động khi có sự cố là 0,9 và lắp đồng thời 3 thiết bị

Gọi $A_i =$ (Thiết bị thứ i báo động khi có sự cố) $i=1,2,3$.

Ta có: $P(A_i) = 0,9; i=1,2,3$

- Mô tả kết luận: Tính xác suất báo động khi có sự cố nếu lắp đồng thời 3 thiết bị

Gọi $A =$ (có báo động khi lắp đồng thời ba thiết bị an toàn)

Tính $P(A)$

Bước 3:

Sử dụng định nghĩa trong mục quan hệ các biến cố để phân tích biến cố A.

Biến cố A xảy ra khi ít nhất một trong ba biến cố A_1, A_2, A_3 xảy ra (quan hệ tổng)

Vậy $A = A_1 + A_2 + A_3$. Như vậy, ta sẽ sử dụng định lý công xác suất.

Trả lời câu hỏi có biến cố không xung khắc không?

Ta sử dụng định lý tổng cho hai biến cố không xung khắc bằng cách coi

$A = (A_1 + A_2) + A_3$. Trong đó $A_1 + A_2$ và A_3 là hai biến cố có thể xảy ra đồng thời

$$P(A) = P[(A_1 + A_2) + A_3] = P(A_1 + A_2) + P(A_3) - P[(A_1 + A_2)A_3]$$

Tương tự: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1.A_2)$ (do A_1, A_2 không xung khắc)

Vậy ta có được:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1.A_2) - P[(A_1 + A_2).A_3]$$

Ta tiếp tục sử dụng định lý nhân xác suất để tính $P(A_1.A_2)$ và $P[(A_1 + A_2).A_3]$

Trả lời câu hỏi: Trong bài có biến cố độc lập không?

Do ba thiết bị hoạt động độc lập nhau, nên các biến cố A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập.

Ta có: $P(A_1.A_2) = P(A_1).P(A_2)$ (do A_1, A_2 là hai biến cố độc lập)

$$P[(A_1 + A_2).A_3] = P(A_1 + A_2).P(A_3) \text{ (do } A_1 + A_2 \text{ và } A_3 \text{ là hai biến cố độc lập)}$$

Thay $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1.A_2)$ vào, và ta tính được:

$$\begin{aligned} P[(A_1 + A_2).A_3] &= [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1).P(A_2)].P(A_3) \\ &= P(A_1).P(A_3) + P(A_2).P(A_3) - P(A_1).P(A_2).P(A_3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta tính được $P(A)$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1).P(A_2) - P(A_1).P(A_3) - P(A_2).P(A_3) + P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$

Thay số: $P(A) = 3.0,9 - 3.0,9.0,9 + 0,9^3 = 0,999$

Bài toán 2: Hai công ti A và B cùng kinh doanh một mặt hàng. Xác suất công ti A thua lỗ là 0,2, xác suất công ti B thua lỗ là 0,4 và cả hai công ti cùng thua lỗ là 0,1. Tìm xác suất các biến cố sau đây:

- a. Chỉ có một công ti thua lỗ
- b. Có ít nhất một công ti làm ăn không thua lỗ.

Giải:

Bước 1: Gạch chân từ khoá.

Hai công ti A và B cùng kinh doanh một mặt hàng. Xác suất công ti A thua lỗ là 0,2, xác suất công ti B thua lỗ là 0,4 và cả hai công ti cùng thua lỗ là 0,1. Tìm xác suất các biến cố sau đây:

- a. Chỉ có một công ti thua lỗ
- b. Có ít nhất một công ti không thua lỗ.

Bước 2: Mô tả giả thiết và kết luận bằng ngôn ngữ xác suất

Xác suất công ti A thua lỗ là 0,2, Gọi $A =$ (công ti A kinh doanh thua lỗ), $P(A) = 0,2$

Xác suất công ti B thua lỗ là 0,4 Gọi $B =$ (Công ti B kinh doanh thua lỗ), $P(B) = 0,4$

cả hai công ti cùng thua lỗ là 0,1 Gọi $C =$ (Cả hai công ti cùng thua lỗ) $P(C) = 0,1$

Chỉ có một công ti thua lỗ Gọi $D =$ (chỉ có một công ti thua lỗ) $P(D) = ?$

Có ít nhất một công ti không thua lỗ. Gọi $E =$ (có ít nhất một công ti thua lỗ). Tính $P(E) = ?$

Bước 3:

Trả lời câu hỏi: Trong bài có biến cố phụ thuộc không?

Để trả lời, ta phân tích biến cố C qua hai biến cố A và B. Sử dụng định nghĩa về mối quan hệ nhân, ta có $C = A.B$ (C xảy ra khi A và B đồng thời xảy ra)

Ta so sánh $P(C) = P(A.B)$ với $P(A).P(B)$ nhận thấy $P(A.B) \neq P(A).P(B)$

Vậy sử dụng định lý nhân ta suy ra A và B là hai biến cố phụ thuộc.

- a. Ta tính $P(D)$. Để tính được ta đi phân tích biến cố D thông qua hai biến cố A và B.

Ta có: $D = A\bar{B} + \bar{A}B$ (do chỉ có một công ti làm ăn thua lỗ nên: công ti A kinh doanh thua lỗ thì công ti B phải kinh doanh thắng lợi, hoặc công ti B kinh doanh thua lỗ thì công ti A phải kinh doanh thắng lợi)

Xuất hiện phép cộng, ta tiếp tục trả lời câu hỏi về mối quan hệ giữa hai biến cố $A\bar{B}$ và $\bar{A}B$. Đây là hai biến cố xung khắc, không xảy ra đồng thời.

$$P(D) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$

Tính $P(A\bar{B})$. Do A và B là hai biến cố phụ thuộc nên ta sẽ sử dụng định lí nhân cho biến cố phụ thuộc.

$P(A\bar{B}) = P(A).P(\bar{B}|A)$ (Do công ti A kinh doanh thua lỗ thì công ti B phải kinh doanh thắng lợi)

$P(\bar{A}B) = P(B).P(\bar{A}|B)$ (Do công ti B kinh doanh thua lỗ thì công ti A phải kinh doanh thắng lợi)

Ta sử dụng hệ quả của định lí cộng cho hai biến cố xung khắc khi gặp biến cố đối:

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) \text{ (Do } \bar{B}|A \text{ \& } B|A \text{ là hai biến cố đối lập nhau)}$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \text{ (Do } \bar{A}|B \text{ \& } A|B \text{ là hai biến cố đối lập nhau)}$$

Vì trong bài xuất hiện có biến cố phụ thuộc, nên ta sẽ sử dụng định nghĩa xác suất có điều kiện:

$$P(B|A) = \frac{P(A.B)}{P(A)}; \quad P(A|B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}$$

Tổng hợp:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A).P(\bar{B}|A) + P(B).P(\bar{A}|B) \\ &= P(A)[1 - P(B|A)] + P(B)[1 - P(A|B)] \\ &= P(A)\left[1 - \frac{P(A.B)}{P(A)}\right] + P(B)\left[1 - \frac{P(A.B)}{P(B)}\right] \end{aligned}$$

Thay số: $P(D) = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{0,1}{0,2}\right) + 0,4 \cdot \left(1 - \frac{0,1}{0,4}\right) = 0,4$

b. Tính $P(E)$

Do $E =$ (có ít nhất một công ti thua lỗ). Khi xuất hiện cụm từ “ít nhất một” ta sẽ sử dụng biến cố đối lập. $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

$\bar{E} =$ (Cả hai công ti cùng thua lỗ). Ta có $\bar{E} = A.B = C$

Vậy $P(E) = 1 - P(C) = 1 - 0,1 = 0,9$

Nhận xét:

❖ Phương pháp chứng minh hai biến cố phụ thuộc.

Nếu $P(A.B) \neq P(A).P(B)$ thì A và B là hai biến cố phụ thuộc

Nếu trong bài có biến cố phụ thuộc, nghĩa là sẽ có *biến cố xảy ra trước, biến cố sau* xảy ra phụ thuộc vào biến cố trước, thì khi đó bài toán sẽ có *sử dụng đến định nghĩa xác suất có điều kiện*.

Dạng 2. SỬ DỤNG CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ CÔNG THỨC BAYES

Trong bước 3, ta luôn trả lời các câu hỏi:

- Có hệ đầy đủ các biến cố không?
- Có biến cố phụ thuộc không?
- Biến cố nào đã xảy ra?

Bài toán 3: Cho hai cái thùng chứa các quả cầu như sau: T1(6t,4đ); T2(5t,5đ). Người ta lấy ngẫu nhiên 2 quả từ thùng một rồi bỏ vào thùng hai. Sau đó lấy ngẫu nhiên ra một quả từ thùng hai.

a. Tìm xác suất lấy ra được quả đỏ.

Giả sử lấy được một quả đỏ. Tính xác suất

b. Quả đỏ đó là của thùng một.

c. Hai quả lấy từ thùng một sang thùng hai là màu đỏ.

Giải:

Bước 1: Gạch chân từ khoá.

Cho hai cái thùng chứa các quả cầu như sau: $T1(6t,4đ)$; $T2(5t,5đ)$. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 quả từ thùng một rồi bỏ vào thùng hai. Sau đó lấy ngẫu nhiên ra một quả từ thùng hai.

a. Tìm xác suất lấy ra được quả đỏ.

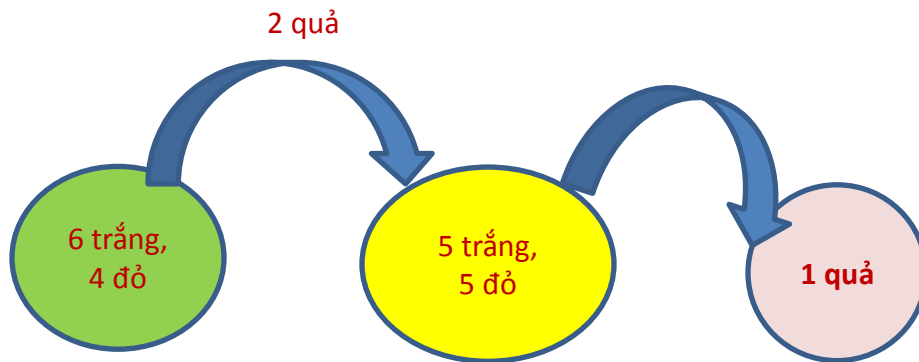
Giả sử lấy được một quả đỏ. Tính xác suất

b. Quả đỏ đó là của thùng một.

c. Hai quả lấy từ thùng một sang thùng hai là màu đỏ.

Bước 2: Mô tả giả thiết và kết luận bằng ngôn ngữ xác suất

Mô tả lại bài toán bằng sơ đồ



- Bài toán có mấy phép thử? Đó là phép thử nào?
- Quả lấy ra từ thùng hai phụ thuộc vào :
 - ★ Màu sắc hai quả lấy từ thùng một bỏ vào thùng hai.
 - ★ Quả lấy ra bản chất là của thùng nào.

Như vậy ta có hai hướng phân tích bài toán: Dựa vào màu sắc và bản chất quả lấy ra của thùng nào.

Hướng phân tích 1. Dựa vào màu sắc hai quả lấy ra từ thùng một.

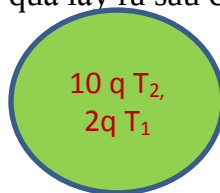
Người ta lấy ngẫu nhiên 2 quả từ thùng một rồi bỏ vào thùng hai

Gọi H_1 = (Hai quả lấy ra từ thùng một là màu đỏ)

H_2 = (Hai quả lấy ra từ thùng một là màu trắng)

H_3 = (Hai quả lấy ra khác màu nhau)

Hướng phân tích 2. Dựa vào bản chất quả lấy ra sau cùng là của thùng nào?



Sau đó lấy ngẫu nhiên ra một quả từ thùng hai.

Gọi K_1 = (Quả lấy ra sau cùng bản chất là của thùng một)

K_2 = (Quả lấy ra sau cùng bản chất là của thùng hai)

a. Tìm xác suất lấy ra được quả đỏ. Gọi A = (Quả lấy ra sau cùng là quả đỏ). Tính $P(A)$

b. Giả sử lấy được một quả đỏ. Tính xác suất Quả đỏ đó là của thùng một.

Tính $P(K_1|A)$

c. Giả sử lấy được một quả đỏ. Tính xác suất Hai quả lấy từ thùng một sang thùng hai là màu đỏ.

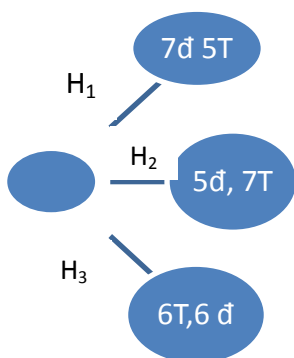
Tính $P(H_1|A)$

Bước 3:

a. Ta trả lời câu hỏi sau: Trong bài có hệ đầy đủ không?

Hướng phân tích 1: Ta thấy H_1, H_2, H_3 lập thành hệ đầy đủ các biến cố. Vậy ta sẽ sử dụng công thức xác suất đầy đủ để tìm $P(A)$

$$\text{Ta có: } P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}; P(H_2) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}; P(H_3) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45}$$



$$P(A|H_1) = \frac{7}{12}$$

$$P(A|H_2) = \frac{5}{12}$$

$$P(A|H_3) = \frac{6}{12}$$

Vậy ta tính $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{29}{60}$

Hướng phân tích 2: Ta thấy K_1, K_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố, nên ta tính $P(A)$ bằng cách sử dụng công thức đầy đủ.

Ta có: $P(K_1) = \frac{2}{12}; P(K_2) = \frac{10}{12}$

$$P(A|K_1) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{10}; P(A|K_2) = \frac{C_5^1}{C_{10}^1} = \frac{5}{10}$$

Vậy $P(A) = P(K_1)P(A|K_1) + P(K_2)P(A|K_2) = \frac{29}{60}$

b. Trả lời câu hỏi : Trong bài có biến cố đã xảy ra chưa?

Do giả sử lấy được quả đỏ nên biến cố $A =$ (Quả lấy ra sau cùng là quả đỏ) đã xảy ra.

Vì vậy ta sẽ sử dụng công thức Bayes tính $P(K_1|A)$

$$\text{Ta có: } P(K_1|A) = \frac{P(K_1).P(A|K_1)}{P(A)} = \frac{4}{29}$$

c. Trong bài có biến cố đã xảy ra chưa?

Do giả sử lấy được quả đỏ nên biến cố $A =$ (Quả lấy ra sau cùng là quả đỏ) đã xảy ra.

Vậy ta sẽ sử dụng công thức Bayes tính $P(H_1|A)$

Ta có:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{42}{261}$$

KẾT LUẬN

Qua việc đề xuất và nêu phương pháp giải quyết một số bài toán đã đặt ra, ta nhận được một lớp số quy trình mang tính thuật giải được áp dụng dựa trên cơ sở các kiến thức cơ bản về các định nghĩa, định lí xác suất cổ điển, từ đó giúp người đọc có cơ hội thuận lợi tìm hiểu và phát triển tư duy thuật toán đối với các dạng bài toán liên quan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Ron S. Kenett, Shelemyahu Zacks .***Thống kê công nghiệp hiện đại với ứng dụng viết trên R, Minitab và JMP***, Bản quyền tiếng Việt ©2016 Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, NXB Bách Khoa Hà Nội. 2016
- [2]. Bộ môn Toán Đại học Mở Địa Chất. ***Hướng dẫn ôn tập xác suất thống kê***. 2017
- [3]. Nguyễn Bá Kim .***Phương pháp dạy học môn Toán***, NXB Đại học Sư Phạm. 2011
- [4]. Bùi Văn Nghị. ***Giáo trình Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán***, NXB Đại học Sư Phạm. 2008